Grupa A - Pismeni ispit iz Matematike, 13.02.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Date su dvije baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima koordinate $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$). Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$.

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \ln(2x - x^3).$$

3. Primjenom određenog integrala izračunati površinu figure koju ograničavaju linije $x + 2y - 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$ i $y = x + 1$.

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x} = y^2$.

Grupa B - Pismeni ispit iz Matematike, 13.02.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Date su dvije baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima koordinate $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$). Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$.

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{3x - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

3. Primjenom određenog integrala izračunati površinu figure koju ograničavaju linije $-2x - y + 8 = 0$, $-x - 2y + 7 = 0$ i $y = x + 2$.

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1}{3}y = e^x y^4$.

Grupa C - Pismeni ispit iz Matematike, 13.02.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Date su dvije baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima koordinate $\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$). Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$.

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

3. Primjenom određenog integrala izračunati površinu figure koju ograničavaju linije $y + 2x + 7 = 0$, $x + 2y + 5 = 0$ i $y = x - 1$.

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = xy^3$.

Grupa D - Pismeni ispit iz Matematike, 13.02.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Date su dvije baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima koordinate $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$). Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$.

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{3x - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

3. Primjenom određenog integrala izračunati površinu figure koju ograničavaju linije $-2x - y + 8 = 0$, $-x - 2y + 7 = 0$ i $y = x + 2$.

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1}{3}y = e^x y^4$.

\# Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ ima koordinate $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Rj.-upute.

Posmatrajmo baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$. Nije teško vidjeti da je

$$\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} &= (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \ldots (*)$$

Kako su koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ to znači da je $v = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Prema $(*)$ imamo

$$\begin{aligned}
4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} &= 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \qquad + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
(-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} &= (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} &= (-7) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Prema tome $v = (-4) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ su $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(#) Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ima koordinate $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Rj.-upute:

Posmatrajmo baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$. Nije teško vidjeti da je

$$\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (*)$$

Kako su koordinate vektora $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ to znači da je $v = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Prema $(*)$ imamo

$$5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(-1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prema tome $v = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ su $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ima koordinate $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Rj.-upute:

Posmatrajmo baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$. Nije teško vidjeti da je

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \ldots (*)$$

Kako su koordinate vektora $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ to znači da je $v = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sad prema $(*)$ imamo

$$7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prema tome $v = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ su $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik

$$Y = \frac{3x-1}{(x^2+1)^2}.$$

R.-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$D: x \in \mathbb{R}$

$x \in (-\infty, +\infty)$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

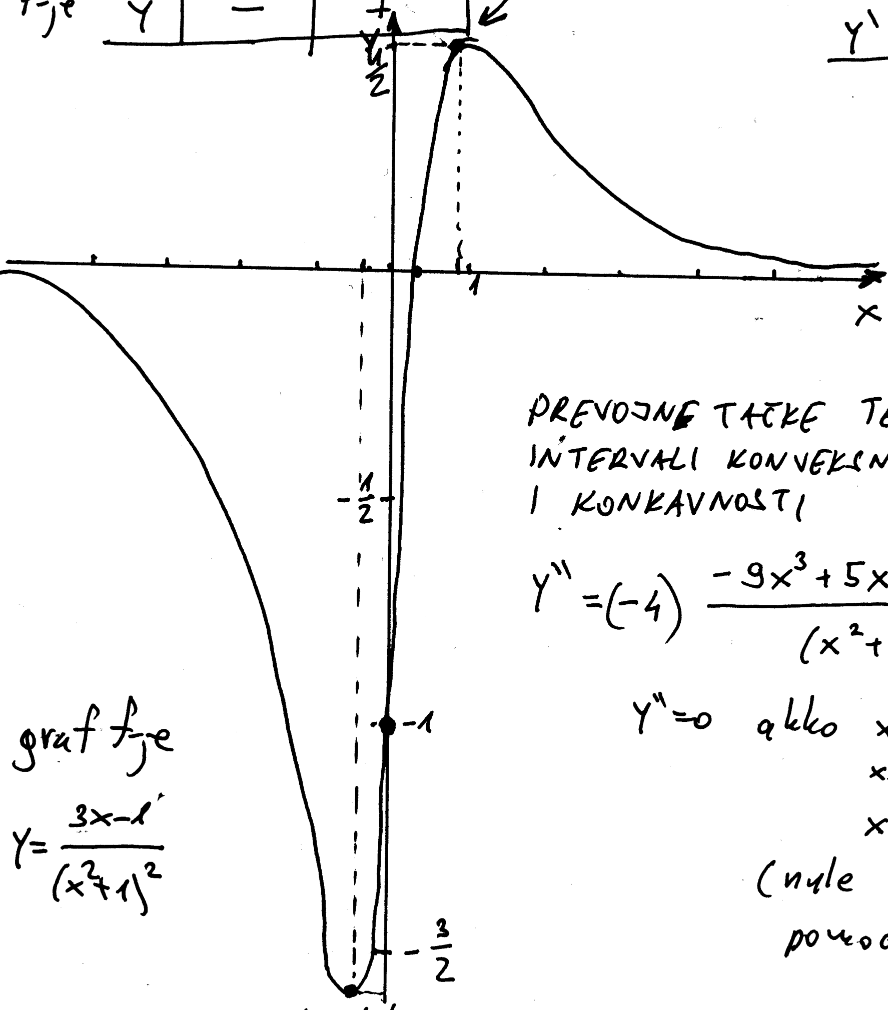
NULE, PRESJEK SA Y-OSOM, ZNAK

$(0,-1)$ je presjek sa y-osom

$(\frac{1}{3}, 0)$ je nula f-je

znak f-je			
X	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, +\infty)$	
Y	$-$	$+$	

MAX



MIN

graf f-je

$$Y = \frac{3x-1}{(x^2+1)^2}$$

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

nema tački prekida $\Rightarrow$ nema V.A.

$Y=0$ je H.A.

Nakon ovog koraka počinjemo skicirati graf f-je

RAST I OPADANJE

$$Y' = \frac{-9x^2+4x+3}{(x^2+1)^3},$$

$D = 16 + 108 = 124$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{31}$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{31}}{-18}$

0,84

-0,4

X	$(-\infty, \frac{2-\sqrt{31}}{9})$	$(\frac{2-\sqrt{31}}{9}, \frac{2+\sqrt{31}}{9})$	$(\frac{2+\sqrt{31}}{9}, +\infty)$	
Y	$-$	$+$	$-$	
Y'	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	intervali rasta i opad.
	MIN	MAX		

EKSTREMI F-JE

Na osnovu tabele rasta i opadanja

$$MIN\left(\frac{2-\sqrt{31}}{9}, \frac{\frac{\sqrt{31}}{3}+\frac{1}{3}}{\left(\left(\frac{2-\sqrt{31}}{9}\right)^2+1\right)^2}\right)$$

$$MAX\left(\frac{2+\sqrt{31}}{9}, \frac{\frac{\sqrt{31}-1}{3}}{\left(\left(\frac{2+\sqrt{31}}{9}\right)^2+1\right)^2}\right)$$

PREVOJNE TAČKE TE INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$$Y'' = (-4)\,\frac{-9x^3+5x^2+9x-1}{(x^2+1)^4}$$

$Y''=0$ akko $x_1 \approx 1{,}27$

$x_2 \approx -0{,}82$

$x_3 \approx 0{,}10$

(nule izračunate uz pomoć kalkulatora)

0,5

-1,6

Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik

$$Y = \ln(2x - x^3)$$

-1,62
9,62
1+4

Rj.-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$\mathcal{D}: x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

NULE, PRESJEK SA Y-OSOM, ZNAK

za $x=0$ f-ja nije definisana $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f-ja ne siječe Y-osu

$Y=0 \Rightarrow \quad 2x - x^3 = 1$

$x^3 - 2x + 1 = 0$

$x=1 \Rightarrow \quad 1^3 - 2\cdot 1 + 1 = 0$

$(x^3-2x+1):(x-1) = x^2+x-1$

$\underline{-\ x^3 - x^2}$

$x^2 - 2x + 1$

$\underline{-\ x^2 - x}$

$-x+1$

$\underline{-x+1}$

$//\ //$

$x^3 - 2x + 1 = (x^2+x-1)(x-1)$

$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$N_1(1;0),\ N_2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};0\right),\ N_3\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};0\right) \qquad x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

x	$\left(-\infty, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right)$	$\left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}), -\sqrt{2}\right)$	$\left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$
Y	+	—	—	+

x	$(1, \sqrt{2})$
Y	—

znak f-je

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

$\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}+0} f(x) = \ln(+0) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{2}$ je V. A.

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \ln(+0) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x=0$ je V. A.

$\lim\limits_{x\to \sqrt{2}-0} f(x) = \ln(+0) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}$ je V. A.

f-ja nema H. A., nema K. A.

poslije ovog koraka počinjemo skicirati graf f-je

RAST I OPADANJE $\quad Y' = -\dfrac{3x^2-2}{2x-x^3}$

x	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\right)$	tab. rasta
Y'	—	+	—	i
Y	↘	↗	↘	opad.

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

0,81

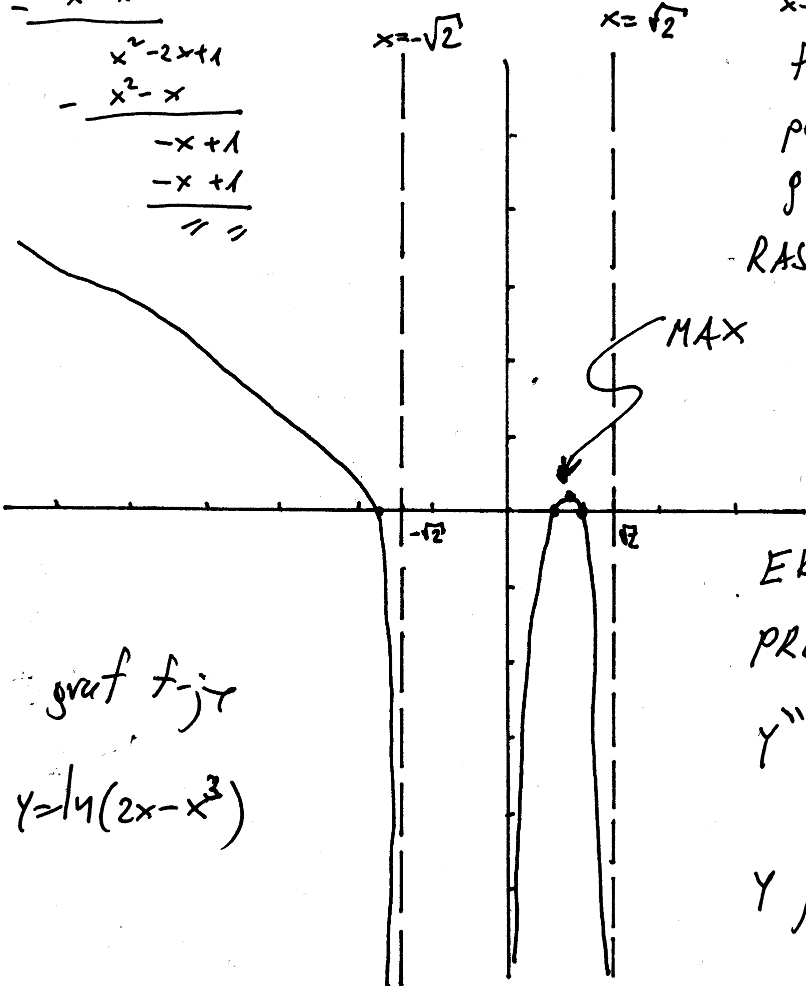
EKSTREMI $\quad Y_{max}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \ln \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

0,084

PREV. TAČ. TE INT. KONV. I KONKAVN.

$$Y'' = -\frac{3x^4+4}{x^2(x^2-2)^2} \qquad Y'' < 0 \ \forall x \in \mathcal{D}$$

Y je uvijek $\cap$ i nema P. T.



graf f-je

$y = \ln(2x - x^3)$

Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik

$$Y=\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Rj.-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$x\in\mathbb{R}$

$x\in(-\infty,+\infty)$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

NULE, PRESJEK SA Y-OSOM, ZNAK

$Y=0 \Rightarrow e^{x}=0$ # kontradikcija ($e^{x}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$)

f-ja nema nulu

$x=0 \Rightarrow Y=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$(0;\frac{1}{2})$ je presjek sa Y-osom

Kako je $e^{x}>0\ \forall x$ to je

x	$(-\infty,+\infty)$
Y	$+$

znak f-je

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

f-ja je neprekidna $\Rightarrow$ nema V.A.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=1 \Rightarrow Y=1$ je H.A. (kad $x\to+\infty$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow Y=1$ je H.A. (kad $x\to-\infty$)

f-ja nema K.A.

RAST I OPADANJE $\quad Y'=\frac{2}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}$

$Y'\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow Y\nearrow\ \forall x$

EKSTREMI

f-ja nema ekstrema

PREV. TAČK. I INT. KONV. I KONKAV.

$$Y''=-4\,\frac{e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^{3}}=-4\,\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{(e^{x}+e^{-x})^{3}}$$

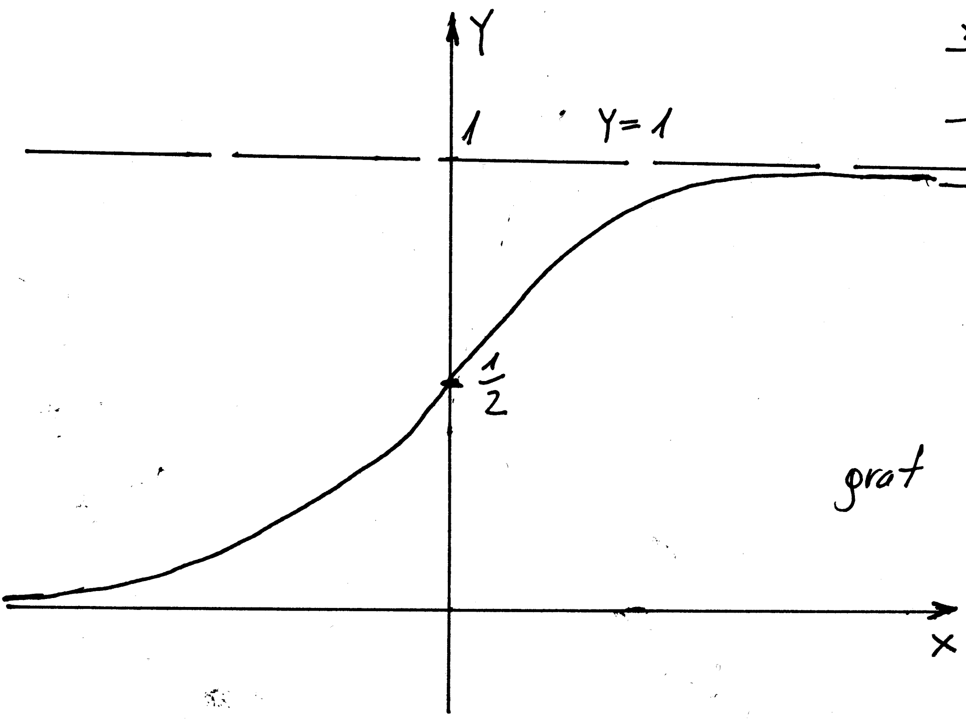
$Y''=0$ akko $x=0$

x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Y''	$+$	$-$
Y	$\cup$	$\cap$

P.T.

intervali konveksnosti i konkavnosti

P.T. $(0;\frac{1}{2})$



graf f-je $Y=\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$

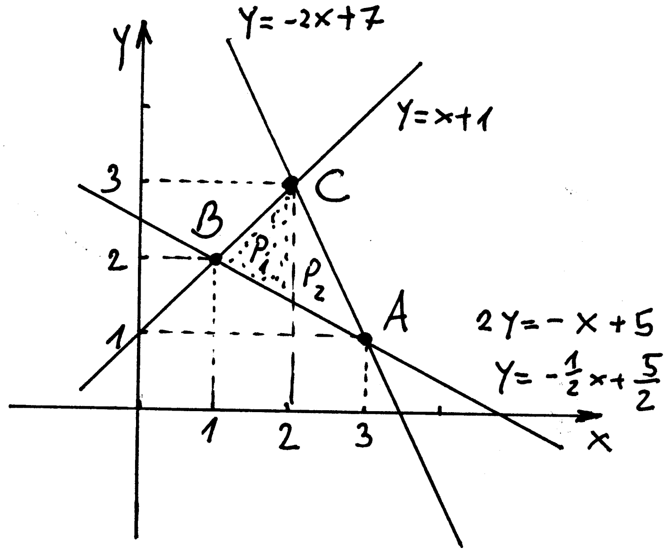
Primjenom određenog integrala izračunati površinu figure koju ograničavaju linije $x+2y-5=0$, $2x+y-7=0$ i $y=x+1$.

Rj. -upute:

Date su tri prave. Odredimo presječne tačke pravih i nacrtajmo sliku.

$$\frac{\begin{array}{c} x+2y-5=0 \\ 2x+y-7=0 \end{array}}{\vdots} \qquad \frac{\begin{array}{c} x+2y-5=0 \\ y=x+1 \end{array}}{\vdots} \qquad \frac{\begin{array}{c} 2x+y-7=0 \\ y=x+1 \end{array}}{\vdots}$$

$$A(3;1) \qquad B(1;2) \qquad C(2;3)$$



$$P=\int_1^2\left[(x+1)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\right]dx+$$

$$+\int_2^3\left[(-2x+7)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\right]dx$$

$$P_1=\int_1^2\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=\ldots=\frac{3}{4}$$

$$P_2=\int_2^3\left(-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\right)dx=\ldots=\frac{3}{4}$$

$$P=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

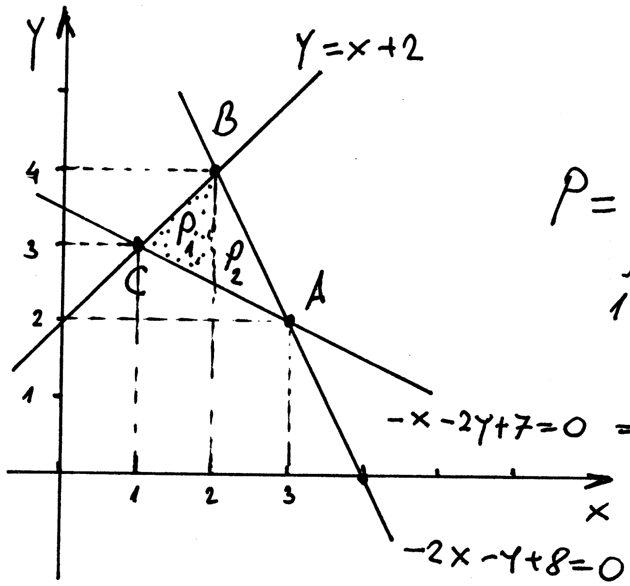
tražena površina

(#) Primjenom određenog integrala izračunati površinu figure koju ograničavaju linije $-2x-y+8=0$, $-x-2y+7=0$ i $y=x+2$.

Rj.-upute:

Date su tri prave. Odredimo presječne tačke pravih i nacrtajmo sliku.

$$\begin{array}{c} -2x-y+8=0 \\ -x-2y+7=0 \\ \hline \vdots \\ A(3;2) \end{array} \qquad \begin{array}{c} -2x-y+8=0 \\ y=x+2 \\ \hline \vdots \\ B(2;4) \end{array} \qquad \begin{array}{c} -x-2y+7=0 \\ y=x+2 \\ \hline \vdots \\ C(1;3) \end{array}$$



$$P=\int_1^2\left[(x+2)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)\right]dx+\int_2^3\left[(-2x+8)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)\right]dx$$

$$P_1=\int_1^2\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=\ldots=\frac{3}{4}$$

$$P_2=\int_2^3\left(-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\right)dx=\ldots=\frac{3}{4}$$

$$P=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

tražena površina

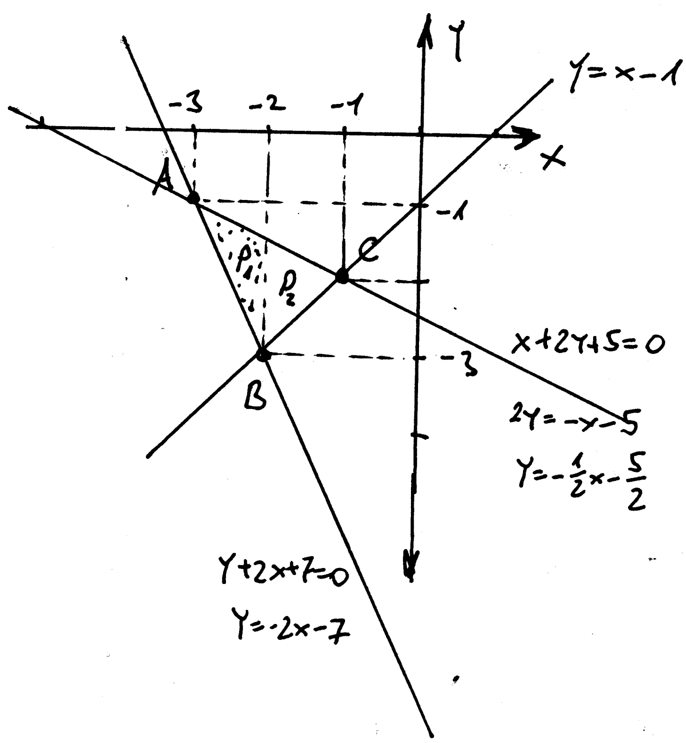
(#) Primjenom određenog integrala izračunati površinu figure koju ograničavaju linije $y+2x+7=0$, $x+2y+5=0$ i $y=x-1$.

Rj.-upute:
Date su tri prave. Odredimo presječne tačke pravih i nacrtajmo sliku.

$$\frac{\begin{array}{c} y+2x+7=0 \\ x+2y+5=0 \end{array}}{\vdots} \quad A(-3;-1)$$

$$\frac{\begin{array}{c} y+2x+7=0 \\ y=x-1 \end{array}}{\vdots} \quad B(-2;-3)$$

$$\frac{\begin{array}{c} x+2y+5=0 \\ y=x-1 \end{array}}{\vdots} \quad C(-1;-2)$$



$$P=\left|\int_{-3}^{-2}\left[(-2x-7)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)\right]dx\right|+$$

$$+\left|\int_{-2}^{-1}\left[(x-1)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)\right]dx\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1=\left|\int_{-3}^{-2}\left(-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\right)dx\right|=\ldots=\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4} \\ P_2=\left|\int_{-2}^{-1}\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx\right|=\ldots=\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\frac{3}{2}$$

tražena površina

(#) Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^2$$

Rj.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^2$$

$y'+\frac{1}{x}y=y^2$ ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina

uvodimo smjenu $y=uv$

$y'=u'v+uv'$ (u i v su dvije pomoćne f-je)

$$u'v+uv'+\frac{1}{x}uv=u^2v^2$$

$$u'v+\underbrace{u\left(v'+\frac{1}{x}v\right)}_{=0}=u^2v^2$$

(a) $v'+\frac{1}{x}v=0$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{-v}{x}$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$$

$$\ln v=-\ln x$$

$$v=x^{-1}$$

$$v=\frac{1}{x}$$

(b) $u'v=u^2v^2$

$v=\frac{1}{x}$ (vidi (a))

$$u'\frac{1}{x}=u^2\frac{1}{x^2} \quad /x$$

$$u'=u^2\frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx}=u^2\frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{u^2}=\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{u^{-1}}{-1}=\ln x+\ln c$$

$$-\frac{1}{u}=\ln xc$$

$$-u=\frac{1}{\ln xc}$$

$$u=\frac{-1}{\ln xc}$$

Opšte rješenje date diferencijalne jednačine je $y=\frac{-1}{x\ln xc}$

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = e^x y^4$$

R:

$y' + \frac{1}{3}y = e^x y^4$ ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina (uvodimo smjenu $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ gdje su u i v dvije pomoćne f-je)

$$u'v + uv' + \frac{1}{3}uv = e^x u^4 v^4$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{1}{3}v\right)}_{=0} = e^x u^4 v^4$$

(a)

$$v' + \frac{1}{3}v = 0$$

$$v' = -\frac{1}{3}v$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{3}v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{3}dx \quad /\int$$

$$\ln v = -\frac{1}{3}x$$

$$v = e^{-\frac{x}{3}}$$

(b)

$$u'v = e^x u^4 v^4$$

$$u' \cdot e^{-\frac{x}{3}} = e^x \cdot u^4 \cdot e^{-\frac{4}{3}x} \quad / \cdot e^{\frac{x}{3}}$$

$$\frac{du}{dx} = u^4$$

$$\frac{du}{u^4} = dx$$

$$\frac{u^{-3}}{-3} = x + C_1 \quad / \cdot (-3)$$

$$u^{-3} = -3x + C$$

$$u^3 = \frac{1}{C - 3x}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{C - 3x}}$$

Opšte rješenje date diferencijalne jednačine je

$$y = \frac{e^{-\frac{x}{3}}}{\sqrt[3]{C - 3x}}$$

(#) Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$x\frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

Rj.: $xy' + y = xy^3 \quad /:x$

$y' + \frac{1}{x}y = y^3$ ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina

(uvodimo smjenu $y = uv$
$y' = u'v + uv'$)

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = u^3v^3$$

$$u'v + \underbrace{u\left(v' + \frac{v}{x}\right)}_{=0} = u^3v^3$$

(a) $v' + \frac{v}{x} = 0$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln v = -\ln x$$

$$v = \frac{1}{x}$$

(b) $u'v = u^3v^3$

$$u'\frac{1}{x} = u^3\frac{1}{x^3} \quad /\cdot x$$

$$u' = \frac{u^3}{x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{x^2}$$

$$\frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} = \frac{x^{-1}}{-1} + C_1$$

$$\frac{1}{2u^2} = \frac{\;}{x} + C_2 \quad /\cdot 2$$

$$\frac{1}{u^2} = \frac{2}{x} + C$$

$$\frac{1}{u^2} = C + \frac{2}{x}$$

$$u^2 = \frac{1}{C + \frac{2}{x}}$$

Opšte Rješenje date diferencijalne jednačine je

$$y = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{C + \frac{2}{x}}}$$